# C.E.S.T.I.

CENTRE D'ETUDES SUPERIEURES DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES

CANDIDATS DES CLASSES PREPARATOIRES AUX GRANDES ECOLES

SESSION DE JUIN 1988 : EPREUVE DE MATHEMATIQUES I 3 Heures -

Notations : e désigne la base des logarithmes népériens(Log e=1), $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Lorsque x est positif $\Delta(x)$ est le domaine de $\mathbb{R}^2$ suivant : $\Delta(x) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < u < x$ , $0 < v < x\}$

---

On définit les deux applications P et B de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par les intégrales suivantes :

$$(a,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow P(a,x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t}\, dt \in \mathbb{R} \qquad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}\, dt \in \mathbb{R}$$

L'objet du problème est d'étudier les propriétés des fonctions P et B et ainsi que les relations qui les lient.

## PREMIERE PARTIE

I-1 Montrer que l'intégrale définissant P converge en t=o et que pour a fixé, $a \in \mathbb{R}^+$, P(a,x) est infiniment dérivable par rapport à x.

I-2 Etablir une relation de récurrence entre P(a+1,x) et P(a,x).

I-3 Pour tout élément a de $\mathbb{R}^+$ on introduit l'application $Q_a(x)$ suivante : $x \in \mathbb{R}^+ \rightarrow Q_a(x) = x^{-a} P(a,x) \in \mathbb{R}$

-3.1 Déterminer la limite de $Q_a(x)$ lorsque x tend vers o par valeurs positives.

-3.2 Montrer que $Q_a(x)$ est solution de l'équation différentielle suivante : $x \dfrac{d^2 Q_a}{dx^2} + (a + 1 + x) \dfrac{dQ_a}{dx} + a\, Q_a = 0$

I-3.3 On suppose que la fonction $Q_a(x)$ admet le développement en série entière suivant :

$$Q_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(a)\, x^n$$

I-3.3.1 Trouver une relation de récurrence entre $u_{n+1}(a)$ et $u_n(a)$.

I-3.3.2 Déterminer $u_n(a)$ ainsi que le rayon de convergence de la série entière définissant $Q_a(x)$

-4 Montrer que $P\left(\frac{1}{2}, x\right)$ s'exprime à l'aide de l'intégrale double suivante :

$$P^2\left(\frac{1}{2}, x\right) = 4 \iint_{\Delta(\sqrt{x})} e^{-(u^2+v^2)}\, du\, dv$$

En déduire que $P\left(\frac{1}{2}, x\right)$ satisfait la double inégalité suivante : $F(x) \leq P\left(\frac{1}{2}, x\right) \leq F(2x)$

où F(x) une fonction que l'on déterminera.

T.s.v.p.

## DEUXIEME PARTIE

II-1 S'assurer que l'intégrale définissant la fonction B existe et montrer que B est symétrique par rapport à ses arguments ($B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$ $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}^+$ et $\forall\, \beta \in \mathbb{R}^+$).

II-2 Relier $B(\alpha+1,\beta)$ et $B(\alpha,\beta+1)$ et en déduire la valeur de $B(n+1,\beta)$ lorsque n est un entier positif ou nul.

II-3 Montrer que $B(\alpha,\beta) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2\alpha-1} \cdot (\cos\theta)^{2\beta-1}\, d\theta$

II-4 Vérifier la relation suivante : $B(p,q)\ B(p+q,r) = B(q,r)\ B(q+r,p)$

lorsque p, q et r sont trois entiers positifs ou nuls.

II-5 Lorsque $\alpha$, $\beta$ et x sont trois éléments de $\mathbb{R}^+$, on définit la fonction $I(\alpha,\beta,x)$ par l'égalité suivante :

$$I(\alpha,\beta,x) = \frac{1}{4}\ P(\alpha,x^2)\ P(\beta,x^2)$$

Montrer que $I(\alpha,\beta,x) = \iint_{\Delta(x)} e^{-(u^2+v^2)}\ u^{2\alpha-1}\ v^{2\beta-1}\ du\ dv$

et en déduire la double inégalité suivante : $B(\alpha,\beta)\ P(\alpha+\beta,x^2) \leqslant 4\ I(\alpha,\beta,x) \leqslant B(\alpha,\beta)\ P(\alpha+\beta,2x^2)$

## TROISIEME PARTIE

On se propose d'étudier les propriétés de la limite de P(a,x) lorsque x devient infiniment grand par valeurs positives, $a \in \mathbb{R}^+$.

III-1 S'assurer que P(a,x) admet une limite lorsque x tend vers l'infini. On note alors : $G(a) = \lim_{x\to+\infty} P(a,x)$

III-2 Etablir une relation de récurrence entre G(a+1) et G(a) et exprimer G(n+1+a) en fonction de G(a) lorsque n est un entier positif ou nul. Calculer $G\left(\frac{1}{2}\right)$ et donner les valeurs de G(n+1) et $G\left(n+\frac{1}{2}\right)$ pour tour entier n positif ou nul.

III-3 Exprimer $B(\alpha,\beta)$ à l'aide de la fonction G et en déduire que $G(a)\ G(1-a) = \int_0^{\infty} \frac{u^{a-1}}{1+u}\, du$

pour tout réel a compris entre o et 1 ( $a \in ]o,1[$ )

## QUATRIEME PARTIE

Pour tout entier <u>n strictement positif</u> on considère la famille d'intégrales suivantes :

$$J_n(a) = \int_o^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ t^{a-1}\ dt \qquad a \in \mathbb{R}^+$$

IV-1 Montrer qu'il existe un entier N positif tel que :

$$n \geqslant N \Rightarrow e^{-t} - \frac{1}{n^{a+1}} \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t} \text{ lorsque } t \in ]o,n[\ .$$

En déduire que $J_n$ (a) tend vers une limite que l'on précisera, lorsque n devient infiniment grand.

IV-2 Calculer $J_n$ (a) en fonction de B(n+1,a) et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^a\, n!}{a(a+1)\ldots(a+n)} = G(a)$

IV-3 Pour tout réel a compris entre o et 1 ($a \in ]o,1[$) exprimez la limite L(a) du produit infini suivant :

$$L(a) = \lim_{n\to+\infty} (1-a^2)\left(1-\frac{a^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right)$$ à l'aide de la fonction G.

IV-4 Soit $\omega$ un nombre réel <u>non entier</u> et $\varphi$ l'application suivante de $]-\pi,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ :

$$x \in ]-\pi,\pi] \to \varphi(x) = \cos \omega x$$

On <u>prolonge</u> $\varphi$ par périodicité de période $2\pi$ à $\mathbb{R}$ tout entier.

IV-4.1 Développer en série de Fourier trigonométrique la fonction $\varphi(x)$ et en déduire la somme S(z) de la série suivante :

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - z^2} \qquad \text{pour } z \in ]o,1[$$

IV-4.2 Montrer que $L(a) = \dfrac{\sin \pi a}{\pi a}$ $a \in ]o,1[$ et en déduire les valeurs des intégrales

$$\int_o^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx \qquad \text{lorsque} \qquad a \in ]o,1[$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail